דוגמה

f העתקה מ$\mathbb{R}^k$ ל$\mathbb{R}^k$.
df העתקה $\mathbb{R}^k$ ל$\mathbb{R}^k$ ליניארית.

$$f(x+h) - f(x) - (df)|_x h = o(\|h\|)$$

אם f ליניארית זה שווה ל

$$f(x) + f(h) - f(x) - f(h) = 0 = o(\|h\|)$$

מקבלים ש$df|_x h = f(h)$. כלומר אם f לינארית נסמן $f(h) = hA$(A מטריצה) ואז

$$h\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_x\right) = df|_x h = f(h) = hA$$

ניתן גם לחשב ישירות:

$$f(h) = hA$$

$$f_i(h) = \sum_{j=1}^{k} x_i a_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}$$

דוגמה

חשב את הנפח של אליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = A,\ A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

$$(u,v,w)\begin{pmatrix} a & | & 0 \\ & b & \\ 0 & | & c \end{pmatrix} = (au, bv, cw)$$

$$\frac{x}{a} = u$$

$$\frac{y}{b} = v$$

$$\frac{z}{c} = w$$

$$\bar{D}' = \left\{u, v, w \middle| u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\right\}$$

שזה כדור בעל רדיוס אחד(במערכת הצירים החדשה)

$$|J(w)| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

$$V = \iiint\limits_{\bar{D}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\bar{D}'} \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w =$$

$$= abc \iiint\limits_{\bar{D}'} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \frac{4\pi}{3}abc$$

אינטגרציה על תחום $\bar{D}$ לא חסום(ב$\mathbb{R}^k$)

עד עכשיו דיברנו על תחומים חסומים. נניח שקיבלנו תחום $\bar{D}$ סגור לא חסום.

<u>מניחים</u>: $\bar{D}_R \doteqdot \bar{D} \cap \bar{B}(0, R)$ תחום(סגור) בעל <u>תכולה</u> לכל $R > 0$, והוא חסום כי הוא מוכל בכדור $\bar{B}(0, R)$

<u>מניחים</u>: f אינטגרבילית על כל תחום כנ"ל $\bar{D}_R$(למשל: f רציפה על $\mathbb{R}^k$).

אזי $I_R = \int\limits_{\bar{D}_R} \cdots \int f\,\mathrm{d}x$ (מוגדר היטב) ($dx = dx_1 ... dx_k$)

אומרים שהאינטגרל $\int\limits_{\bar{D}} \cdots \int f\,\mathrm{d}x$ <u>קיים</u>(או מתכנס) אם $\lim\limits_{R\to\infty} I_r$ קיים, וגבול זה נקרא אז האינטגרל $\int\limits_{\bar{D}} \cdots \int f\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\int\limits_{\bar{D}} \cdots \int = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\bar{D}} \cdots \int f\,\mathrm{d}x}$$

דוגמה

$$\iint\limits_{\bar{D}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

$$\bar{D} = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

(הרבעון החיובי הסגור)

$$\bar{D}_R = \bar{D} \cap \bar{B}\,(0,R)$$

$$I_R = \iint\limits_{\bar{D}_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

נעביר לקואורדינטות פולריות: $\dfrac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(r,\varphi)} = r$

$$x^2+y^2 = r^2, \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right.$$

$$\underbrace{(r,\varphi)}_{\in[0,R]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]=\bar{D}'_R} \qquad \to (x,y) \in \overline{D}_R$$

$$I_R = \int_0^{\pi/2}\int_0^R e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^R e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\int_0^{R^2} e^{-u}\,\mathrm{d}u \qquad \left(\begin{array}{c} u = r^2 \\ du = 2r\,\mathrm{d}r \end{array} \right)$$

$$= e^{-u}\Big|_{R^2}^{0} = 1 - e^{-R^2}$$

$$\boxed{I_R = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right)}$$

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \frac{\pi}{4}$$

מסקנה: $\iint\limits_{\bar{D}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{\pi}{4}$

דרך אחרת

נסמן $\bar{K}_R = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 0 \le x \le R \\ 0 \le y \le R \end{array} \right\}$. התחום $\bar{D}_R$ נמצא בתוך הריבוע שחוסם את הרבע עיגול שחוסם אותו:

$$\bar{K}_R \subseteq \bar{D}_{R\sqrt{2}} \subseteq \bar{K}_{R\sqrt{2}}$$

לכן מתקיים

$$\boxed{\iint\limits_{\bar{K}_R} \dots \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint\limits_{\bar{D}_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint\limits_{\bar{K}_{R\sqrt{2}}} \dots \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

$$I_R = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R}\right) \le \iint\limits_{[0,x]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) \le \left(\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}y\right) \le \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

$$\boxed{\exists \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

כלומר קיבלנו

$$\exists \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ומכיוון ש e^{-x^2} פונקציה זוגית נקבל

$$\exists \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

תרגיל

נתון $\underline{n} = (1,2,3)$. מצא את משוואת המישור הניצב לn.

פתרון

$u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ - נקודה כלשהי על המישור. $\underline{x} = (x,y,z)$ - נקודה כללית על המישור. הוקטור ביניהם:

$$\underline{u} = (x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)$$

הוקטור הכללי הזה ניצב ל$\underline{n}$:

$$\boxed{\underline{n} \cdot \underline{u} = \bar{0}}$$

$$\boxed{n_1 (x - x_0) + n_2 (y - y_0) + n_3 (z - z_0) = 0}$$

דרך אחרת

$\underline{n}$ הוא הנורמל של כל מישור הניצב לו - כלומר ניצב לכל וקטור במישור כזה, ולכן גם לכל שני וקטורים כאלה:

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

משוואת המישור העובר דרך שלושת הנקודות הנתונות $(x_i, y_i, z_i), i = 0, 1, 2$ היא

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

ובצורה אלגברית:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{cases}$$

כדי שיהיה פתרון לא טריוויאלי הדטרמיננטה של המקדמים צריכה להיות אפס:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ניתן להפוך את זה לדטרמיננטה הקודמת על ידי חיסור השורה הראשונה מכל שורה אחרת:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 - x & y_0 - y & z_0 - z & 0 \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z & 0 \end{vmatrix}$$

תרגיל

חשב את הנפח של

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 4 - z^2 \geq x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

פתרון

$x^2+y^2+z^2\le 4$ בתוך הכדור ברדיוס 2. מצד שני, $x^2+y^2\ge 1$ $\Leftarrow$מחוץ לגליל ברדיוס אחד.

נחשב הנפח בין שתי הכיפות הכדוריות מעל העיגול $x^2+y^2\le 1$(במישור xy)(כלומר החלק מהגליל שנגרע מהכדור) ונחסר אותו מנפח הכדור.

הנפח הוא:

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$\iint\limits_{(x^2+y^2\le 1)}\left[\sqrt{4-x^2-y^2}-\left(-\sqrt{\cdots}\right)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$=2\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{4-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}y\overset{\substack{u=4-r^2\\ du=-2udr}}{=}\int_0^1 u^{1/2}\,\mathrm{d}u=2\pi u^{3/2}\Big|_3^4=2\pi\left(8-3^{3/2}\right)$$

תשובה סופית:

$$\boxed{\frac{4\pi}{3}2^3-2\pi\left(8-3^{3/2}\right)}$$